

·教育与教学·

高分子物理中链动力学的教学研究

龚湘君 张广照*

(华南理工大学高分子材料科学与工程系 材料科学研究所 广州 510641)

摘要: 高分子物理中的链动力学是理解聚合物材料流变行为和机械性能的核心和基础。本研究提出以松弛时间的理论计算为核心、以高分子标度关系为线索的教学设计。通过 Rouse 模型、Zimm 模型和 Tube 模型的递进式讲解,构建“稀溶液单链动力学—流体力学修正—缠结效应”的完整框架。利用问题导向的教学方式,详细论述 3 个核心模型的假定和推导思路,强调标度理论在高分子动力学中的重要性,弥补高分子链段动力学理论深入不够、概念碎片化的问题,为高分子物理课程改革提供新思路。

关键词: 高分子动力学; Rouse 模型; Zimm 模型; Tube 模型; 标度律; 递进式教学

Teaching and Research on Chain Dynamics in Polymer Physics

GONG Xiang-jun, ZHANG Guang-zhao*

(Department of Polymer Materials Science and Engineering, Research Institute of Materials Science,
South China University of Technology, Guangzhou 510641)

Abstract: Chain dynamics constitutes the foundational framework for understanding the rheological behavior and mechanical properties of polymeric materials. This study introduces an instructional design grounded in the theoretical computation of relaxation time, with scaling relationships serving as its unifying conceptual scaffold. By systematically developing the Rouse model, Zimm model, and Tube model—progressing from “single-chain dynamics in dilute solutions” to “hydrodynamic interactions” and finally to “entanglement-constrained motion”—we establish a coherent, hierarchically structured pedagogical pathway. Guided by a problem-driven approach, we explicitly articulate the physical assumptions, mathematical approximations, and logical derivation steps underpinning each model, thereby highlighting how scaling theory bridges microscopic chain motions with macroscopic viscoelastic responses. This design directly responds to two persistent challenges in polymer physics education: (1) the lack of conceptual depth in connecting molecular mechanisms to observable phenomena, and (2) the fragmentation of chain dynamics topics across disjointed modules. As such, it provides a principled foundation for curriculum reform aimed at fostering mechanistic reasoning and quantitative intuition.

Keywords: Polymer dynamics; Rouse model; Zimm model; Tube model; Scaling law; Progressive teaching

引用: 龚湘君, 张广照. 高分子物理中链动力学的教学研究. 高分子通报, 2026, 39(5), 820–825.

Citation: Gong, X. J.; Zhang, G. Z. Teaching and research on chain dynamics in polymer physics. *Polym. Bull.* (in Chinese), 2026, 39(5), 820–825.

高分子动力学是理解聚合物材料流变行为与分子运动机制的核心理论,但这部分内容在当前

的高分子物理教学体系中是薄弱环节。国内经典的《高分子物理》相关教材较少涉及高分子运动

高分子物理教育与教学专题;2025-12-29 收稿,2026-02-06 录用,2026-04-14 网络出版

* 通信联系人:张广照,E-mail: msgzzhang@scut.edu.cn

doi: 10.14028/j.cnki.1003-3726.2026.25.383

理论方面的内容^[1-4]。其中的少数教材以小篇幅做了讨论,但仍旧呈现一定局限。例如:集中于唯象学描述(如Maxwell模型、Voigt-Kelvin模型),对分子运动本源的探究很少,理论深度不足;高分子的链动力学被拆分到分子运动和力学性质2个章节之中,缺乏对链结构导致的动力学变化的逻辑关联;最为重要的是缺乏标度律的讨论视角——动力学部分未系统讲述弛豫时间等重要参数与分子量的标度关系,高分子运动仅用于解释玻璃化转变过程中的次级松弛现象,链动力学的基本模型(如Rouse模型和Zimm模型)仅在黏弹性章节中被简单提及。相比之下,国际经典教材中高分子链动力学是贯穿高分子结构与性能相关内容的灵魂。*The Theory of Polymer Dynamics* (1986年)构建了从Rouse到Zimm到Tube的3阶段动力学理论体系^[5]。*Polymer Physics* (2003年)建立了松弛时间的演进脉络(progression of relaxation time),系统展现了从稀溶液到熔体的动力学演化规律^[6]。

国内高分子专业的教学改革研究不断深入。然而,在分子动力学这一核心内容的教学方案上,相关研究仍然较少。传统教学存在以下问题:首先,概念引入缺乏逻辑性,直接给出大量经验公式而不解释其物理起源;其次,缺乏理论模型的定量讨论。仅孤立讲述相关概念,学生难以彻底理解链段动力学的描述方式及意义;再次,忽视标度关系的讲解,未将标度率作为高分子物理的主线和核心。

基于上述问题,本研究提出以高分子链段的松弛时间为核心参数、以标度律为主线、整合Rouse-Zimm-Tube三大模型,采用递进式的讲述,构建从稀溶液、浓溶液到高分子熔体的完整教学内容。教学设计遵循以下原则:第一是逻辑递进性,从最简单的串珠链和理想链出发,逐步引入流体力学相互作用和拓扑约束;第二是问题导向性,通过提出关键问题引导学生思考模型的适用范围和改进方向;第三是理论完整性,对每个模型进行完整的理论推导,揭示标度律的物理本质。

1 递进式的教学内容设计

1.1 核心概念——链段松弛时间

高分子动力学研究的核心是理解聚合物长链分子在不同环境下的运动规律^[7]。与小分子不同,高分子链的运动具有多尺度特征。从单体的局

部运动到整链的协同运动,时间尺度跨越十几个数量级。这种复杂性要求我们建立系统且深入的理论框架。松弛时间(τ)是描述高分子动力学的核心参数。它被定义为链构象从非平衡态恢复到平衡态所需的特征时间。对于线性高分子,松弛时间与分子量(M)之间存在标度关系: $\tau \sim M^\nu$ 。指数 ν 的值取决于分子所处的环境:稀溶液中的自由链($\nu=2$)^[8]、良溶剂中考虑流体力学相互作用的链($\nu \approx 1.8$)^[9]、缠结熔体中的链($\nu \approx 3.4$)^[10]。这种标度关系的演变反映了分子环境对链动力学的深刻影响。

1.2 模型的层次结构

高分子动力学的3个基本模型构成了一个逻辑严密的层次结构。

Rouse模型^[8]:将高分子链视为通过弹簧连接的珠子串(图1),忽略流体力学相互作用和排除体积效应。这是最简单的模型,适用于 θ 溶剂中的稀溶液或短链熔体。

Zimm模型^[9]:在Rouse模型基础上引入流体力学相互作用,考虑溶剂流场对链段运动的影响(图2),适用于良溶剂中的稀溶液。

Tube模型^[10]:考虑缠结效应,将周围链的拓扑约束简化为一个管道,链只能沿管道爬行(图3)。适用于缠结的浓溶液和熔体。

这种层次结构不仅反映了理论的发展历程,

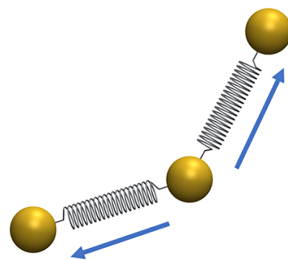


图1 Rouse模型

Figure 1 Rouse model

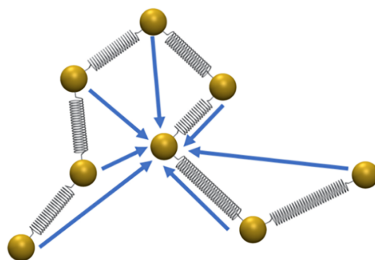


图2 Zimm模型

Figure 2 Zimm model



图3 Tube模型

Figure 3 Tube model

也为教学提供了自然的递进路径。

1.3 教学具体内容

基于前述逻辑,本节将阐述高分子链动力学三大核心模型的具体教学内容。教学内容按照“问题导向→模型建构→数学推导→实验验证→适用范围讨论”的框架展开,每个模型都从一个核心问题出发,引导学生理解模型的物理意义。

1.3.1 单根理想串珠链动力学: Rouse 模型

在进入 Rouse 模型的正式讲授前,提出 2 个问题激发学生思考: 第一,“如何定量描述一个单链在溶液中的运动行为”; 第二,“描述这个运动行为有什么实际意义”。这两个问题的讨论自然引出松弛时间,它用于描述高分子链从非平衡态回到平衡态所需的时间。这个参数直接关系到材料的加工性能和使用性能,比如聚合物的挤出成型温度窗口、3D 打印的最适加工条件等。

Rouse 模型用最少的假设捕捉到了高分子链动力学的本质特征。它的核心假设包括: (1) 将高分子链视为 N 个摩擦系数为 ζ 的珠子,用弹簧常数为 k 的高斯弹簧相连; (2) 忽略排除体积效应,即链段间不存在斥力相互作用; (3) 忽略流体力学相互作用,即珠子的运动不会在溶剂中产生影响其他珠子运动的流场; (4) 每个珠子的运动遵循朗之万方程,包含系统性的摩擦力和随机的布朗力。这些假设需注意一些常见误解。例如,学生经常误认为“珠子”就是单个单体,要强调这里的“珠子”是一个粗粒化的概念,可以代表若干个单体组成的链段。通过参数化珠子长度 b ,向学生传达 coarse-graining(粗粒化)这一重要的建模思想^[5]。具体而言, Rouse 模型的数学描述基于朗之万方程^[8,11]:

$$\zeta \frac{d\mathbf{R}_n}{dt} = k(\mathbf{R}_{n+1} + \mathbf{R}_{n-1} - 2\mathbf{R}_n) + \mathbf{f}_n(t) \quad (1)$$

其中, ζ 为珠子的摩擦系数; k 为弹簧常数; $\mathbf{R}_n$ 为第 n 个珠子的位置矢量; $\mathbf{f}_n(t)$ 为珠子受到的随机力,满足涨落-耗散定理:

$$\langle \mathbf{f}_n(t) \cdot \mathbf{f}_m(t') \rangle = 6k_B T \zeta \delta_{nm} \delta(t-t') \quad (2)$$

式中, N 为单体的数量。式(2)的左边是惯性项(在过阻尼极限下被摩擦力代替),右边第 1 项是弹性收缩力,第 2 项是热噪声。 $\mathbf{f}_m(t')$ 为第 m 个珠子在时刻 t' 所受到的随机力(热噪声); k_B 为玻尔兹曼常数; δ_{nm} 为当 $n \neq m$ (不同珠子)时,关联为 0,即不同珠子的随机力彼此不相关,只有同一个珠子 ($n = m$) 才可能有非零关联; $\delta(t-t')$ 表示随机力在时间上是白噪声,即只有在同一时刻 ($t = t'$) 才相关,不同时刻完全不相关。 T 代表系统的绝对温度。对于三维空间中的 N 个珠子,总共有 $3N$ 个独立的随机力分量。这个方程体现了高分子链动力学的本质,即弹性力、摩擦力和热扰动之间的竞争。

正则坐标变换是 Rouse 模型求解的关键数学技巧^[5]。这种变换的物理意义是将耦合的链段运动分解为独立的“正则模式” $\mathbf{X}_p$:

$$\mathbf{X}_p = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{R}_n \cos\left(\frac{p\pi n}{N}\right) \quad (3)$$

通过这种变换,原本耦合的 N 个方程组转化为 N 个独立的方程:

$$\frac{d\mathbf{X}_p}{dt} = -\frac{k_p}{\zeta} \mathbf{X}_p + \mathbf{F}_p(t) \quad (4)$$

其中,

$$k_p = 4k \sin^2\left(\frac{p\pi}{2N}\right) \quad (5)$$

式中: k_p 是第 p 个模式的有效弹簧常数。 $p=1$ 对应整链的全局运动(松弛时间最长), p 值越大对应越局域的运动(松弛时间越短)。 n 是 N 个单体中的第 n 个单体。这种分层次的运动图像是理解高分子动力学的关键。其中,每个模式的松弛时间 τ_p 为^[8]

$$\tau_p = \frac{\zeta}{4k \sin^2\left(\frac{p\pi}{2N}\right)} \approx \frac{\zeta N^2}{\pi^2 k p^2} \quad (p \ll N) \quad (6)$$

最长松弛时间 τ_R (Rouse 时间) 为

$$\tau_R = \tau_1 \approx \frac{\zeta N^2}{\pi^2 k} \quad (7)$$

接下来进入这部分教学的重点一标度分析,帮助学生建立微观参数与宏观性质的联系。总摩擦系数: $\zeta \propto N$ (与链长或单体数量 N 成正比) 而 Rouse 弹簧的弹性常数: $k \propto 1/N$ (与 N 成反比,体现链的柔性)。将这些关系代入 Rouse 时间表达式,得到关键的标度关系^[8]:

$$\tau_R \propto N^2 \propto M^2 \quad (8)$$

进而可推导出自扩散系数^[8]:

$$D \propto \frac{1}{N\tau_R} \propto M^{-1} \quad (9)$$

及零切黏度^[7]:

$$\eta_0 \propto \frac{NK_B T \tau_R}{V} \propto M \quad (10)$$

其中, M 为高分子链的分子量。非缠结链的链松弛时间(Rouse 时间 τ_R) 定义为整条链的端到端矢量自相关函数衰减到 $1/e$ 所需的时间, 对应于链整体构象的完全弛豫。

可见, Rouse 模型将链运动分解为 N 个简正模式 ($p=1, 2, \dots, N$), 每个模式对应一个松弛时间 $\tau_p = \tau_R/p^2$ 。其中 $p=1$ 的模式对应链的整体运动, 其松弛时间 $\tau_1 = \tau_R$ 即为链松弛时间(Rouse 时间), 是所有模式中最长的松弛时间。高阶模式 ($p>1$) 对应链的局域波动, 松弛更快。Rouse 模型存在明显的局限性。在良溶剂的稀溶液中的实验测得扩散系数标度律是 $D \propto M^{-0.6}$ 而非 Rouse 模型预测的 $D \propto M^{-1}$ 。然而, Rouse 模型的意义重大。在聚合物熔体中, 由于周围链的“笼子效应”, 流体力学相互作用被有效地屏蔽, Rouse 模型反而能很好地描述短链的动力学行为。这部分的结尾可进一步引导学生思考: 如果高分子链不是“Linear chain”线型链(如“Star polymer”星型聚合物、“Comb polymer”梳型聚合物、“Branched polymer”支化聚合物), Rouse 模型如何修正? 这种拓扑结构的改变会如何影响松弛时间?

1.3.2 耦合了流体力学效应的 Zimm 模型

Zimm 模型的讨论从 Rouse 模型留下的问题开始: “为什么 Rouse 模型与稀溶液中的实验结果不符; 是什么物理因素导致了这种差异”。通过讨论引出 Rouse 模型忽略的流体力学相互作用是关键因素。当高分子链在溶剂中运动时, 每个链段的运动都会在周围的溶剂中产生流场, 这一流场显著扰动了其他链段, 从而产生长程的运动耦合效应。

在 Zimm 模型中, 当珠子 i 在溶剂中运动时, 会在距离为 r 的珠子 j 处产生速度场, 这个速度场的强度按照 $1/r$ 的规律衰减(Oseen 近似)。Oseen 张量的形式为^[9,12]

$$H_{ij} = \frac{1}{8\pi\eta_s} \left[I + \frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^T}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^2} \right] \quad (11)$$

其中, I 代表各向同性的流体力学相互作用(球对称):

$$\frac{(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)^T}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^2}$$

代表各向异性的修正(T 为矩阵外积符号), 考虑了沿着连线方向和垂直方向的不同流场分布。从该公式可见, 相互作用是瞬时且长程的, 其强度随距离的 $1/r$ 衰减^[12]。同时, 该模型忽略了流体的惯性效应。正如电荷间的库仑相互作用具有长程性质一样, 流体力学相互作用也具有长程特征。它使不同高分子链的动力学行为产生差异。

完整考虑流体力学相互作用会导致数学上的极大困难, 因为需要同时处理所有珠子间的相互作用。Zimm 的关键贡献在于提出了预平均近似^[9]:

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|} \right\rangle \approx \frac{1}{\langle |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j| \rangle} \quad (12)$$

对于高斯链, 有:

$$\langle |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^2 \rangle = b^2 |i - j| \quad (13)$$

因此可以得到预平均的 Oseen 张量。这个近似在数学上并不严格(平均的倒数不等于倒数的平均)。但正因这个近似, 问题变得可解, 并且结果与实际实验相符。通过量纲分析和数学推导, 可以得到 Zimm 模型的关键结果:

$$\tau_{\text{Zimm}} \propto \frac{\eta_s R_g^3}{k_B T} \quad (14)$$

其中, R_g 是回转半径。对于高斯链, $R_g \propto N^{1/2}$, 因此:

$$\tau_{\text{Zimm}} \propto N^{3/2} \propto M^{3/2} \quad (15)$$

但在良溶剂中, 由于排除体积效应, $R_g \propto N^\nu$ ($\nu \approx 0.6$), 所以^[9,13]:

$$\tau_{\text{Zimm}} \propto N^{3\nu} \propto M^{1.8} \quad (16)$$

这个结果与稀溶液实验相符合, 验证了流体力学相互作用是稀溶液动力学的主导因素。相应地, 自扩散系数的标度关系变为

$$D \propto M^{-0.6} \quad (17)$$

这与动态光散射实验结果完全一致^[13,14]。通过进一步比较分析 Rouse 和 Zimm 模型, 可以发现在熔体中, 由于链的高密度排列, 溶剂分子的流动受到严重限制, 流体力学相互作用被有效屏蔽, Rouse 模型反而更适用^[5]。而在 θ 溶剂中, 排除体积效应被抵消, Zimm 模型退化为 $\tau \propto M^{3/2}$ 的形式。在极稀的溶液中, 链间相互作用可以忽略,

Zimm模型表现最佳。Zimm模型的推导基于预平均近似(preaveraging approximation),即假设流体力学相互作用可以对链构象预先平均。在此近似下,通过求解包含流体力学张量的Langevin方程,可严格推导出 $\tau_Z \sim \eta_s R_g^3 / k_B T$ 。而基于量纲分析,考虑溶剂黏度 η_s 、链尺寸 R_g 和热力学能量 $k_B T$,同样可得到相同的标度关系,两种方法相互印证。可见不同的物理环境需要不同的理论模型,关键是要识别哪些物理因素是主导的。在讨论该模型的结尾,我们会进一步讨论“当单链具有非线性拓扑结构(星形、环形)时,流体力学相互作用如何修改松弛时间”。对于星形聚合物,有效的回转半径减小,导致松弛时间缩短;对于环形聚合物,拓扑约束的改变也会显著影响动力学行为^[6]。

1.3.3 缠结体系的Tube模型

Tube模型的衍生来源于一个令人困惑的实验现象:“为什么聚合物熔体的零剪黏度在临界分子量 M_c 处会发生突然的跃迁”。流变实验的结果^[7,15]表明: $M < M_c$ 时, $\eta_0 \propto M$,而在 $M > M_c$ 时, $\eta_0 \propto M^{3.4}$ 。这种转变暗示着系统中出现了新的作用机制。接下来的一个关键问题是:“什么是缠结;缠结出现时会如何影响链的松弛时间”。通过这个问题引导学生思考高分子链在高浓度下的拓扑约束问题。

值得注意的是缠结并不是一个严格定义物理量,而是一个统计概念。缠结的特征参数包括:(1)缠结分子量 M_e :相邻2个缠结点之间的链部分的分子量,对应 N_e 个Kuhn链节。其中,Kuhn链节指的是长度为 b (Kuhn长度)的可独立运动的链单元;(2)缠结数 $Z = M/M_e$:每条链上的缠结数目;(3)临界分子量 $M_c \approx 2M_e$:开始出现明显缠结效应的分子量。值得注意的是,缠结与物理交联不同。缠结是动态的、可以滑移的约束,而交联是固定的化学键。

de Gennes提出将复杂的缠结相互作用简化为一个虚拟的“管道”^[10]。在这个模型中,每条链被限制在一个直径为 a 的管道内,链只能沿着管道轴线做一维的蛇形运动(爬行, reptation)而管道的轮廓是随机游走的,总长度为 L 。管径 a 与缠结密度的关系: $a^2 \propto 1/\rho$,其中 ρ 是链数密度。管道长度 $L \propto N b^2/a$,反映了由于缠结约束,有效的链长度增加了^[10]。缠结链的链松弛时间(reptation时间 τ_d)的定义是链段沿管道完全爬行一个管长度(链的轮廓长度)所需的时间,标志着链完全逃离

原始管道约束。同时,文中已加入以下修改内容:这些链松弛时间是描述链整体运动的最长松弛时间,区别于局域链段运动的短时松弛。

Tube模型的数学框架基于扩散方程。链沿管道的扩散系数为

$$D_{\parallel} = \frac{k_B T}{(N+1)\zeta} = D_{\text{Rouse}} \quad (18)$$

这表明爬行扩散系数等于Rouse扩散系数,因为沿管道方向链的运动基本上是自由的。关键的爬行时间(松弛整个管道所需的时间)为^[10]

$$\tau_d = \frac{L^2}{\pi^2 D_{\parallel}} \propto N^3 \quad (19)$$

但实验中观察到的标度指数是3.4,而不是3.0^[15],这个差异来自2个重要的修正机制,即轮廓长度涨落(contour length fluctuation, CLF)和约束释放(constraint release, CR)^[16]。CLF指链端可以快速地进出管道,减少了有效的爬行距离。CR指周围形成管道的链也在运动,导致管道本身的涨落。这些修正使得实际的标度指数变为^[16]

$$\tau_d \propto M^{3.4} \quad (20)$$

基于Tube模型,可以预测缠结熔体的流变性质^[10,15],并与实验结果符合得很好,证实了Tube模型的有效性。为了加深理解,我们设计了以下互动问题:“如果将链端化学交联固定, τ_d 会发生什么”。学生通过讨论会发现爬行被阻断,松弛时间趋于无穷,系统变成弹性体。

3个模型的对比的标度关系总结见表1。

表1 不同模型的标度关系

Table 1 Scaling relations of different models

模型特征	Rouse (1953)	Zimm (1956)	Tube (1971)
核心假设	无HI, 无排除体积	考虑HI, 预平均近似	拓扑缠结, 管道约束
适用体系	θ 溶液稀溶液, 短链熔体	良溶剂稀溶液	长链浓溶液/熔体
松弛时间标度	$\tau_{\text{Rouse}} \propto N^2$	$\tau_{\text{Zimm}} \propto N^{1.8}$	$\tau_{\text{Tube}} \propto N^{3.4}$
扩散系数标度	$D \propto N^{-1}$	$D \propto N^{-0.6}$	$D \propto N^{-2}$
零切黏度标度	$\eta_0 \propto N$	不适用	$\eta_0 \propto N^{3.4}$

总之,当聚合物链在溶剂中移动时,其上的每个珠粒(无论代表单个单体还是链的较大片段)都会持续与溶剂分子发生碰撞。除了系统性的摩擦力外,这些珠粒还会受到随机力的作用,从而产生布朗运动。首先引入Rouse模型分析了单个

珠粒在这些受力状态下的瞬时运动,再进一步在 Zimm 模型中考虑珠粒在溶剂中的运动会在溶剂中产生速度场,这个速度场会被其他所有珠粒感知到。这个流体力学影响在稀的聚合物溶液中尤其重要。而对于聚合物熔体则不需要考虑,因为在熔体中摩擦力可被视为由链相对于静止基质的运动所产生(一级近似下可认为基质静止)。与普通液体不同,速度场在熔体中的传播极难发生,这意味着不存在流体动力学相互作用。从稀溶液再进一步扩展到浓的高分子缠结状态的场景,从而引出 Tube 模型。

2 结语

高分子链动力学的教学挑战性高,需要在数学严密性和物理直观性之间找到平衡。通过 Rouse-Zimm-Tube 的递进式教学设计,我们力图为学生构建一个完整而清晰的知识框架。这种教学方法不仅传授了具体的知识内容,更重要的是培养了学生的科学思维方式:如何从复杂现象中抽象出简化模型,如何用数学工具描述物理过程,如何通过实验验证理论预测,如何认识模型的适用范围和局限性。

参考文献

- 1 何曼君. 高分子物理, 第4版. 上海: 复旦大学出版社, 2017.
- 2 金日光, 华幼卿. 高分子物理, 第4版. 北京: 化学工业出版社, 2019.
- 3 何平笙. 新编高聚物的结构与性能, 第2版. 北京: 科学出版社, 2021.
- 4 卢江, 沈家瑞, 吕晓龙. 高分子物理. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- 5 Doi, M.; Edwards, S. F. The Theory of Polymer Dynamics. Oxford: Oxford University Press, 1986.
- 6 Rubinstein, M.; Colby, R. H. Polymer Physics. Oxford: Oxford University Press, 2003.
- 7 Ferry, J. D. *Viscoelastic Properties of Polymers*, 3rd ed. John Wiley & Sons, 1980.
- 8 Rouse, P. E. Jr. A theory of the linear viscoelastic properties of dilute solutions of coiling polymers. *J. Chem. Phys.*, **1953**, 21(7), 1272–1280.
- 9 Zimm, B. H. Dynamics of polymer molecules in dilute solution: viscoelasticity, flow birefringence and dielectric loss. *J. Chem. Phys.*, **1956**, 24(2), 269–278.
- 10 de Gennes, P. G. *Scaling Concepts in Polymer Physics*. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1979.
- 11 Kubo, R. The fluctuation-dissipation theorem. *Rep. Prog. Phys.*, **1966**, 29(1), 255.
- 12 Happel, J.; Brenner, H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Springer, 1983.
- 13 Schaefer, D. W.; Han, C. C. Quasielastic light scattering from dilute and semidilute polymer solutions. In: *Dynamic Light Scattering*. Boston, MA: Springer, 1985. 181–243.
- 14 Pecora, R. Dynamic light scattering measurement of nanometer particles in liquids. *J. Nanopart. Res.*, **2000**, 2(2), 123–131.
- 15 Graessley, W. W. *Polymeric Liquids & Networks*. Boca Raton: Garland Science, 2024.
- 16 Milner, S. T.; McLeish, T. C. B. Reptation and contour-length fluctuations in melts of linear polymers. *Phys. Rev. Lett.*, **1998**, 81(3), 725–728.